Kalman - poslední výstřel

- jak se v plné složitosti aplikovat Kalmana na počítání GPS pozice?
- i-tá družice vyšle svoji polohu (x_i, y_i, z_i) a aktuální čas t_i
- naše poloha neznámá: (x, y, z, t)

$$t = \frac{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}}{v_c} + t_i$$

- chtěli bychom lineární verzi: $ax + by + cz + td + e = 0$
- proč?

Proč je lineární forma lepší? (1/2)

- 4 satelity, 4 lineární rovnice, 4 neznámé $\longrightarrow$ maticový výpočet
- pokud více měření (např. k šesti satelitům), pak metoda nejmenších čtverců:

$$\min \sum_i (a_i x + b_i y + c_i z + d_i t + e_i)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_i a_i (a_i x + b_i y + c_i z + d_i t + e_i) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \sum_i b_i (a_i x + b_i y + c_i z + d_i t + e_i) = 0$$

$$\ldots$$

Proč je lineární forma lepší? (2/2)

- pokud měření v různých časech, případně různě přesná $\longrightarrow$ Kalman
- linearizace v „místě“ predikce (x_p, y_p, z_p, t_p)

$$e_i = \frac{\sqrt{(x_p - x_i)^2 + (y_p - y_i)^2 + (z_p - z_i)^2}}{v_c} + t_i - t_p$$

$$a_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}}{v_c} + t_i - t\right)$$

$$a_i = \frac{1}{v_c}\left(\frac{x_p - x_i}{\sqrt{(x_p - x_i)^2 + (y_p - y_i)^2 + (z_p - z_i)^2}}\right)$$

Model pohybu

Bílý šum — stacionární proces s nekorelovanými hodnotami, splňující vztahy

$$\mathbf{E}(X_t) = 0, \mathbf{E}(X_t^2) = 1, \mathbf{E}(X_{t(1)}\overline{X}_{t(2)}) = 0[t(1) \neq t(2); t(1), t(2), t \in T]$$

- Bílým šumem se nejčastěji aproximuje:
  1. rychlost
  2. zrychlení
  3. jerk (škubání)

Maticový zápis

- Aproximace rychlosti

$$\mathbf{F} = 0, \mathbf{G} = 1 \Rightarrow \mathbf{A} = 1$$

- Aproximace zrychlení

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Aproximace jerku

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lepší matematický model

Stavová rovnice

$$x_{k+1} = A_k x_k + w_k$$

kde x_k je n dimenzionální stavový vektor, A_k je transformační matice a w_k šum/chyba stavu ($w_k \sim N(0, Q)$)

Rovnice měření

$$z_k = H x_k + v_k$$

kde z_k je m dimenzionální vektor měření, H je $m \times n$ matice určující vztah mezi stavem a měřením a v_k je šum/chyba měření ($v_k \sim N(0, R)$)

Algoritmus aktualizace

Predikce stavu a chyby — pomocí stavové rovnice

$$
\begin{aligned}
x_{k+1}^- &= Ax_k \\
P_{k+1}^- &= AP_kA^T + Q
\end{aligned}
$$

Korekce pomocí měření — pomocí rovnice měření

$$
\begin{aligned}
z_k &= Hx_k + v_k \\
K_k &= P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \\
x_k &= x_k^- + K_k(z_k - Hx_k^-) \\
P_k &= (I - K_kH)P_k^-
\end{aligned}
$$